Isométries affines

E eve $Is_A(E)$ est l'ens des appl de la forme

$$x \overset{\phi}{\longmapsto} u(x) + a \quad \begin{cases} u \in O(E) \\ a \in E \end{cases}$$

RQ $a = \Phi(0)$; $u : x \mapsto \underbrace{\Phi(x) - \Phi(0)}_{\text{partie linéaire notée } \vec{\phi}}$

1) $(Is_A(E), \circ)$ est un sg de $\mathcal{G}(E)$

inverse : $u(x) + a = y \Leftrightarrow x = u^{-1}(y) - u^{-1}(a)$

$$\Phi^{-1}(y) = u^{-1}(y) - u^{-1}(a)$$

$$\overrightarrow{\Phi^{-1}} = \vec{\Phi}^{-1}$$

composée : $\psi : x \mapsto v(x) + b$, $v \in O(E)$, $b \in E$

$\psi \circ \phi(x) = v(u(x)) + b + v(a)$ | $\overrightarrow{\psi \circ \phi} = \vec{\psi} \circ \vec{\phi}$

2) $\begin{pmatrix} Is_A(E) \to O(E) \\ \phi \mapsto \vec{\phi} \end{pmatrix}$ est un morphisme de groupe

Exps : Calculer $\psi \circ \phi \circ \psi^{-1} \circ \phi^{-1}$

Ex : Soit ϕ, ψ deux isométries affines positives du plan ($\det \vec{\phi} = 1$,

1) Mq Φ n'est pas une translation $\Leftrightarrow$ ϕ possède un unique pt fixe

2) Mq $\Psi \circ \Phi \circ \Psi^{-1} \circ \phi^{-1}$ est une translation

S/ ($\Rightarrow$) $\phi(x) = \mu(x) + a$ avec $\left| \begin{array}{l} \mu \in SO_2(\mathbb{R}) \\ \mu \neq I \end{array} \right.$ alors $\phi(\omega) = \omega$

$\Leftrightarrow$ $(\mu - I)(\omega) = -a$ or $\operatorname{Ker}(\mu - I) = \{0\}$ car $\mu \in SO_2 \setminus \{I\}$

donc $\mu - I$ est bijective (rang), $\exists! \, \omega \in E$ $(\mu - I)(\omega) = -a$

$\phi(\omega) = \omega$ $\Big|$ $\phi(X - \omega) = \mu(X - \omega)$ $\longrightarrow$ idée fond changer le centre de l'isométrie

($\Leftarrow$) I dem (E + pres)

2) $\vec{\Phi} = \mu$, $\vec{\Psi} = v$ $\Big|$ $\overrightarrow{\Psi \circ \Phi \circ \Psi^{-1} \circ \phi^{-1}} = v \circ \mu \circ v^{-1} \circ \mu^{-1} = I$
car SO_2 est commutatif

$E, \langle g \rangle$ un eve

<u>Ex</u> Soit p, q deux P.O, M.q. E est somme directe de de plans et de droites stables par p et q.

Cours pris en photo.